13ο μάθημα
1/6/20

Πώς δείχνω ότι είναι πολ/μο μεγαλύτερου βαθμού από 1 (γιατί στη 1 μεταβλ. είναι απλό) είναι ανάγωγο?

Α.υ.δ.ο. γεωμετρικά δεν έχει κανένα ομοιόμ. σημείο

<u>π.χ.</u> $V(x^3+y^3-7x^2y^2) = V(f(x,y))V(g(x,y))$

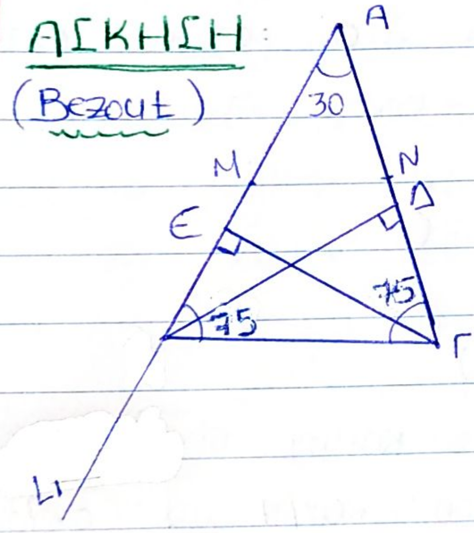
$\det f \neq 0$

$\det g \neq 0$

Μόνο στις 2βάθμιες μπορώ να πάρω Εσσιανή

γ.υ.δ.ο. είναι ή δεν είναι ανάγωγες

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>:
(<u>Bezout</u>)



Μια κωνική τομή διέρχεται από τα Α, Β, Γ, Ε, Δ

Δ.ο. η $V(Q)$ διέρχεται κ. από τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ, ΑΓ

<u>ΛΥΣΗ</u>: $V(Q)$ κ. $V(L_1)$ έχουν τουλ. κοινά τα σημεία Α, Ε, Β, περισσότερα απ' ό,τι το γινόμενο των βαθμών του $1 \cdot 2 = 2$ (Bezout)

$\xRightarrow{\text{Bezout}}$ $V(Q)$ κ. $V(L_1)$ έχουν κοινή συνιστώσα

→

Η $V(L_1)$ είναι ανάγωγη άρα έχει μόνο μία συνιστώσα

$\Rightarrow$ Η κοινή συνιστ. είναι η $V(L_1)$

$\Rightarrow Q = \underbrace{L_1}_{\text{βαθμού 1}} \underbrace{L}_{\text{βαθμού 1}}$

$$V(Q) = V(L_1) \cup V(L)$$

$$\Delta, \Gamma \in V(Q) \Rightarrow \Delta, \Gamma \in V(L_1) \cup V(L)$$

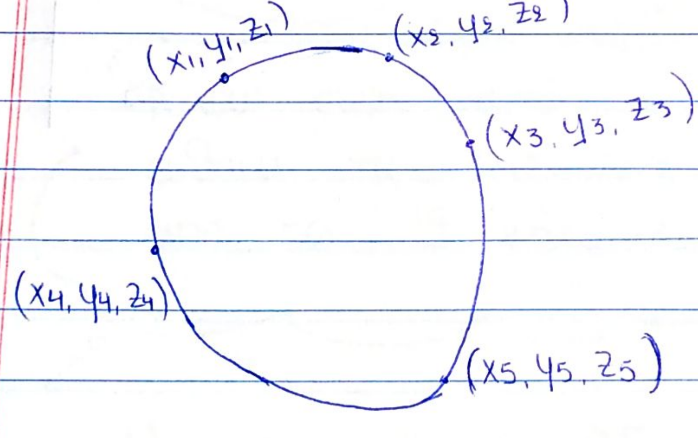
$$\Delta, \Gamma \notin V(L_1) \Rightarrow \Delta, \Gamma \in V(L)$$

L η ευθεία που διέρχεται από τα Δ, Γ

$$\left.\begin{matrix} M \in V(L_1) \\ N \in V(L) \end{matrix}\right\} \Rightarrow M, N \in V(Q)$$

∎

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 9 σημείων</u>: Έστω $V(C_1)$, $V(C_2)$ είναι δύο κυβικές που έχουν ακριβώς 9 κοινά σημεία.
Αν $V(C)$ είναι μια άλλη κυβική που διέρχεται από τα 8 από αυτά τότε διέρχεται κ. από το ένατο.



$$a_1 X^2 + a_2 XY + a_3 Y^2 + a_4 XZ + a_5 YZ + a_6 Z^2 = 0$$

Ποια η εξίσ. της?

6x6 οριζ.

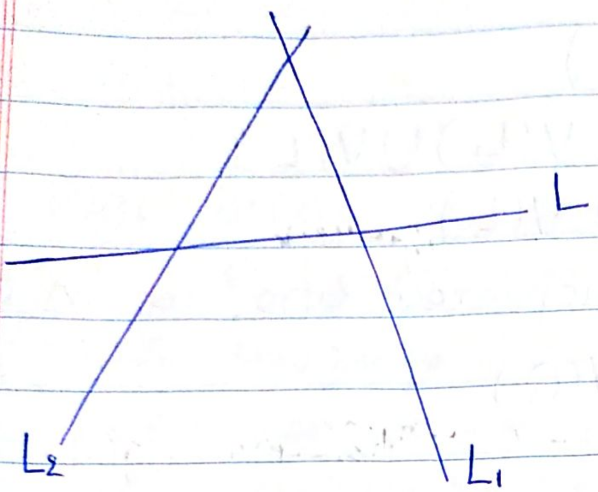
$$\begin{vmatrix} X^2 & XY & Y^2 & XZ & YZ & Z^2 \\ X_1^2 & X_1Y_1 & Y_1^2 & X_1Z_1 & Y_1Z_1 & Z_1^2 \\ X_2^2 & X_2Y_2 & Y_2^2 & X_2Z_2 & Y_2Z_2 & Z_2^2 \\ & & & & & \\ X_5^2 & X_5Y_5 & Y_5^2 & X_5Z_5 & Y_5Z_5 & Z_5^2 \end{vmatrix} = 0$$

$V(Q_1) = V(Q_2)$

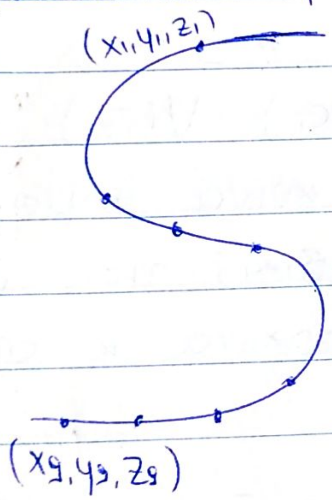
Έχουν τουλ. 5 κοινά σημεία $\overset{\text{Bezout}}{\Rightarrow}$ έχουν κοινή συνιστώσα

$V(Q_1) = V(L) \cup V(L_1)$, $Q_1 = LL_1$

$V(Q_2) = V(L) \cup V(L_2)$, $Q_2 = LL_2$



Αντίστοιχα κ. στις 3βάθμιες:

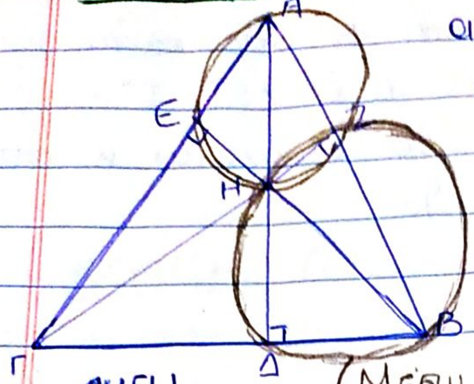


$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^2z \quad y^2z \quad xyz \quad xz^2 \quad yz^2 \quad z^3$

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2y & \cdots & xyz & \cdots & z^3 \\ x_1^3 & x_1^2y_1 & & x_1y_1z_1 & & z_1^3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_9^3 & & & & & z_9^3 \end{vmatrix} = 0$$

10×10 οριζ.

ΑΣΚΗΣΗ: Δ.ο. κάθε κυβική καμπύλη που διέρχεται από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Ι κ. I^* διέρχεται αναγκαστικά κ. από το ορθόκεντρο Η όπου Ι, I^* τα κυκλικά σημεία στο ∞ δηλ. $I=(i,1,0)$, $I^*=(1,i,0)$



ΛΥΣΗ: (Μέσω Θ. των 9 σημείων)

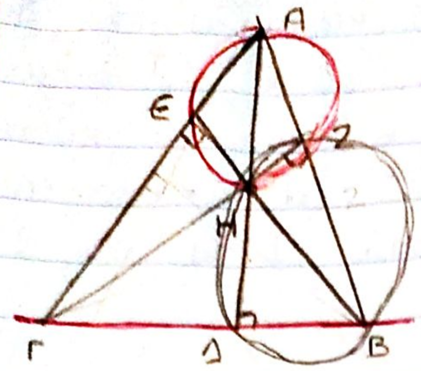
Εδώ έχω 6 σημεία.
Δηλ. 6 ορθές γωνίες.
Αμέσως σκέφτομαι εγγράψιμα 4πλευρα

Εδώ θέλω 3 εγγράψιμα 4πλευρα.
Ψάχνω δύο κυβικές που να διέρχονται από τα 8 αυτά σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Ι, I^* κ. το Η (Θ. 9 σημείων)

Ψάχνω έναν κύκλο κ. μία ευθεία που περνάνε από τα 9 σημεία

Η μία είναι η ΑΓ, ο κύκλος που περνάει από τα Δ, Ζ, Β (κ. τα κυκλικά σημεία)
κ. η άλλη είναι ο άλλος κύκλος κ. η ΒΓ

Δηλαδή:

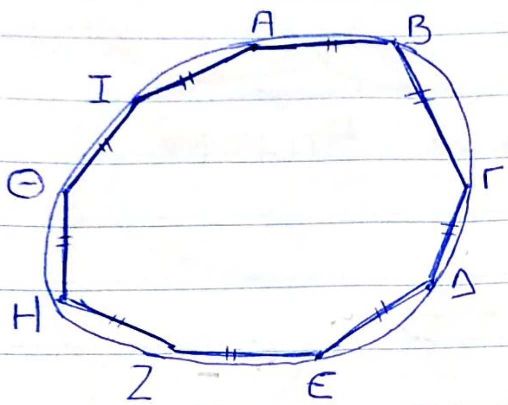


+Η κυβική διέρχεται από τα 8 από αυτά Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Ι, Ι' άρα θα διέρχεται κ. από το 9ο

Παρόμοια **ΑΣΚΗΣΗ**: **ΘΕΜΑ**

Κανονικό 9γωνο

Δ.ο. αν μια κυβική διέρχεται από τις 8 κορυφές του 9γωνου τότε διέρχεται κ. από την ένατη



ΛΥΣΗ:

Ο κύκλος περνάει από αυτά τα 9 σημεία, άρα τα 8 που με ενδιαφέρουν (για το Ι δεν είμαι ακόμα σίγουρη)

κυβική

$V(F)$ $V(Q)$

τουλ. 8 κοινά σημεία

περιγεγρ. κύκλος

Bezout: κοινή συνιστώσα

Ο κύκλος είναι ανάγωγος άρα έχει μόνο μία συνιστώσα

$F = QL$

κύκλος

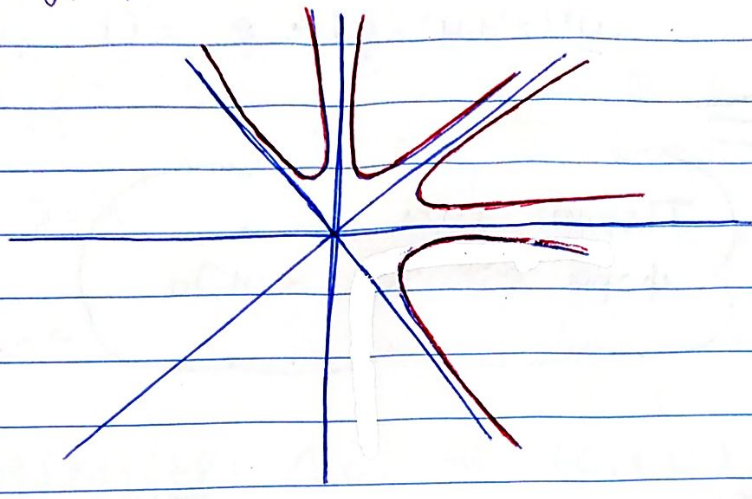
ευθεία

άρα $V(F) = V(Q) \cup V(L)$

Όμως: $I \in V(Q)$ $\Longrightarrow$ $I \in V(F)$

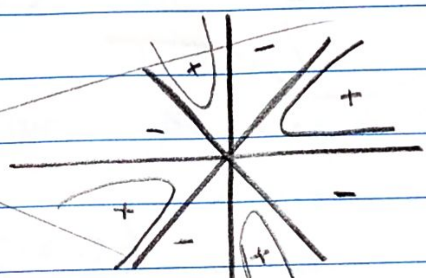
$I \in V(L)$

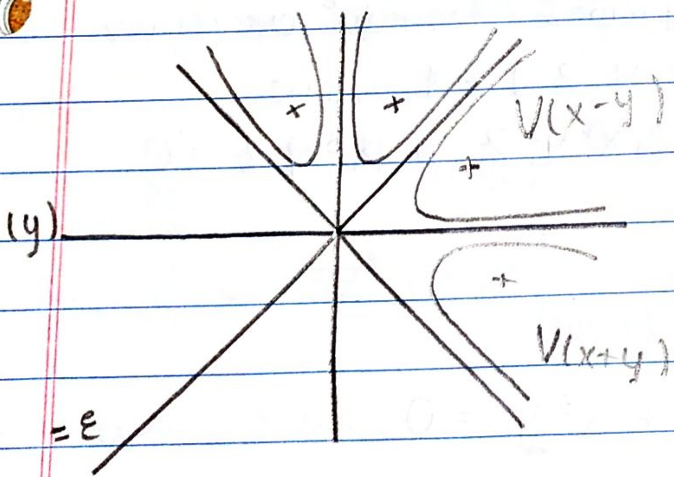
ΑΣΚΗΣΗ: Γράψτε την εξίσωση μιας αλγεβρικής καμπύλης που η γραφική της παράσταση να μοιάζει



ΛΥΣΗ:

1η σκέψη: Klein ⟶

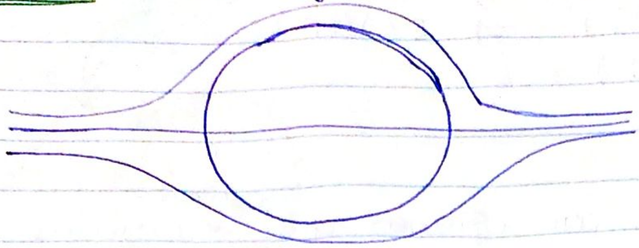




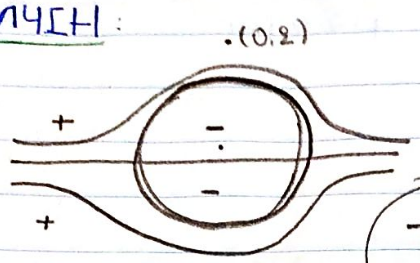
$$\underbrace{(x+y)x^2(x-y)y^2}_{>0} - \varepsilon = 0$$

άρα διαλέγω $\varepsilon > 0$

ΑΣΚΗΣΗ: Ποια εξίσωση μοιάζει με αυτή ?

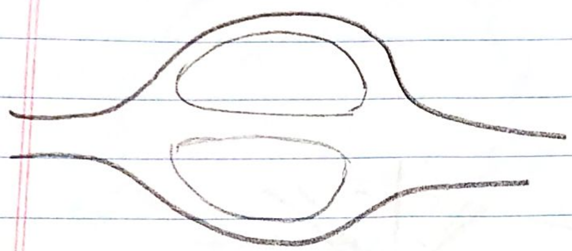


ΛΥΣΗ:



$y^2(x^2+y^2-1)-\varepsilon=0$, $\varepsilon>0$

Περνάει μία φορά από τον κύκλο



Τότε θα είχε εξίσωση
$y^2(x^2+y^2-1)^2-\varepsilon=0$, $\varepsilon>0$

ΘΕΜΑ

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε 5 τριάδες θετικών ακεραίων (x,y,z) με Μ.Κ.Δ.$(x,y,z)=1$ τ.ω.

$$x^5+y^5+5x^2y^3-3x^2y^2z+x^3yz=0$$

ΛΥΣΗ:

Ακέραιες + $x^3yz=0$

$x^5+y^5+5x^2y^3-3x^2y^2+x^3y=0$

$y=\lambda x$

$\Rightarrow x^5+\lambda^5x^5+5x^2\lambda^3x^2-3x^2\lambda^2x^2+x^3\lambda x=0$

$\Rightarrow x^4(x+\lambda^5x+5\lambda^3x-3\lambda^2+\lambda)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{3\lambda^2-\lambda}{1+\lambda^5+5\lambda^3}$, $y=\dfrac{3\lambda^3-\lambda^2}{1+\lambda^5+5\lambda^3}$

$\lambda = 1$: $\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases} \rightarrow (2, 2, 7)$

$\lambda = 2$: $\begin{cases} x = \frac{10}{73} \\ y = \frac{20}{73} \end{cases} \rightarrow (10, 20, 73)$

$\lambda = 3$: ....

ΑΣΚΗΣΗ: Δ.ο. το $(0,1,0)$ είναι σημείο καμπύλης της καμπύλης $V(2y^2x - z^3 + 4zx^2)$

ΛΥΣΗ:

Δε χρειάζεται να "πάω" σε Εσσιανή, γιατί έχω ένα σημείο.

Εφαπτομένες στο $(0,1,0)$:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y^2 + 2xz \Big|_{(0,1,0)} = 2 \neq 0$ άρα δεν είναι ιδιόμορφο

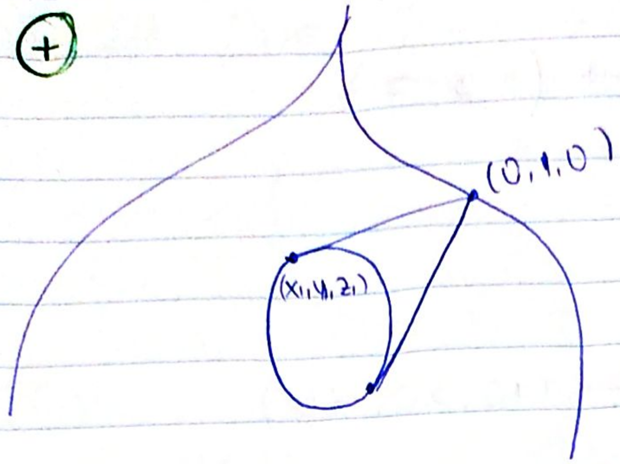
$\frac{\partial F}{\partial y} = 4xy \Big|_{(0,1,0)} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial z} = -3z^2 + 4x^2 \Big|_{(0,1,0)} = 0$

άρα $2x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ εφαπτόμενη

$\begin{cases} 2y^2x - z^3 + 4zx^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow z^3 = 0 \Rightarrow z = 0$

+



Βρείτε τα σημεία P τ.ω. η εφαπτ-
ετα σημεία αυτά
διέρχεται από το
(0,1,0)

$$(2y_1^2 + 8z_1x_1)x + (4y_1x_1)y + (-3z_1^2 + 4x_1^2)z = 0$$

$$V(2y^2x - z^3 + 4zx^2)$$

$$\begin{cases} 4y_1x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \text{ ή } x_1 = 0 \\ 2y_1^2x_1 - z_1^3 + 4z_1x_1^2 = 0 \end{cases}$$

αν $y_1 = 0$: $-z_1^3 + 4z_1x_1^2 = 0$

$\Rightarrow z_1(4x_1^2 - z_1^2) = 0$

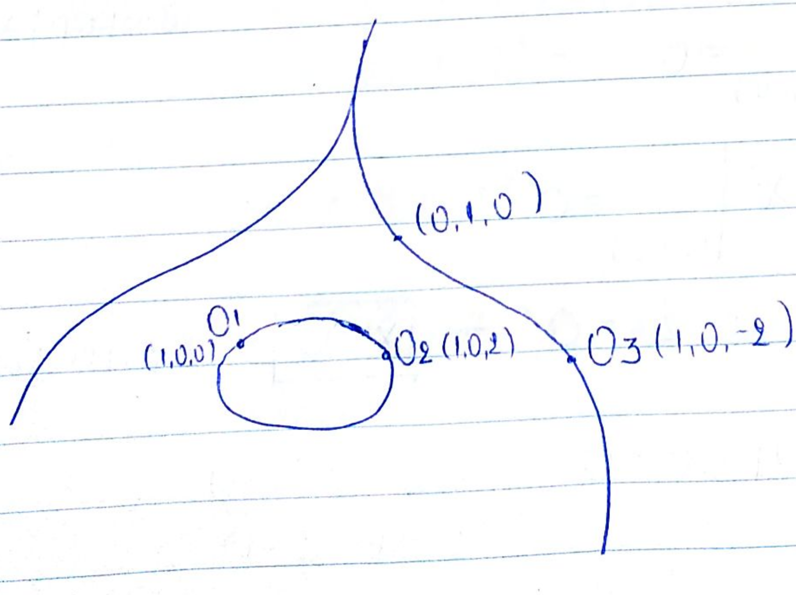
$\Rightarrow z_1(2x_1 - z_1)(2x_1 + z_1) = 0$

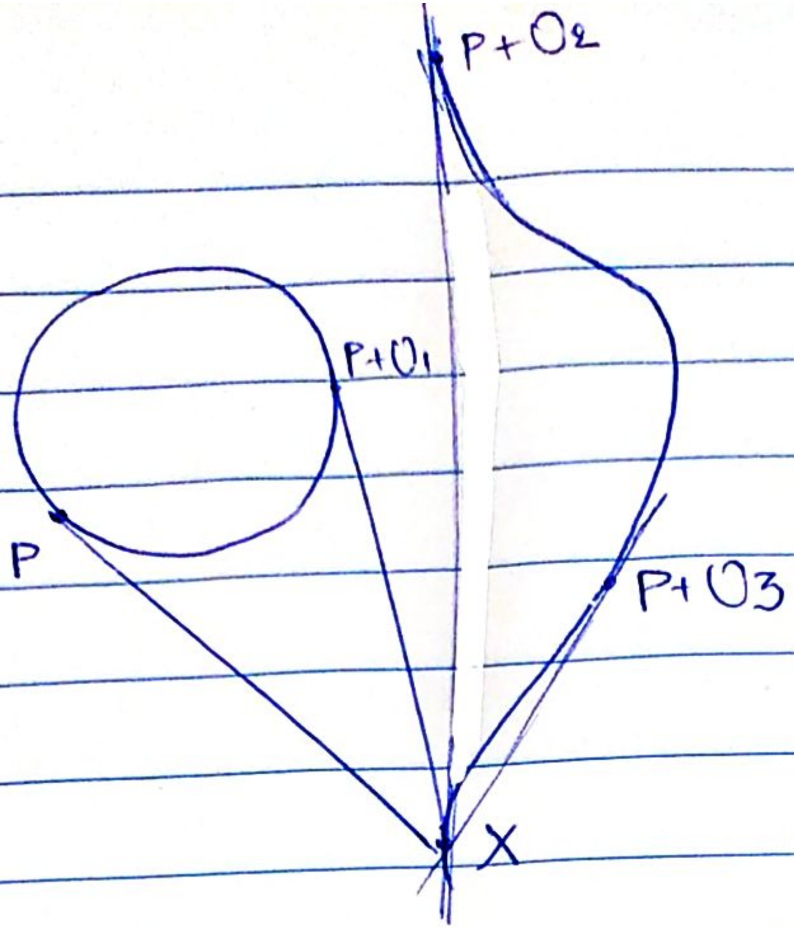
$\Rightarrow (1,0,0), (1,0,2), (1,0,-2)$

Αυτά είναι στην ευθεία $y=0$

αν $z_1 = 0$: $-z_1^3 = 0$

$\Rightarrow (0,1,0)$





O_1, O_2, O_3 τάξης 2

Δ.Ο. οι 4 εφαπτόμενες στα σημεία P, $P+O_1$, $P+O_2$, $P+O_3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο X

$P+P+X=0 \Rightarrow X=-2P$

0 γιατί οι τάξης 2

$(P+O_1)+(P+O_1)+X_1=0 \Rightarrow 2P+\cancel{2O_1}+X_1=0 \Rightarrow X_1=-2P$

άρα αυτές οι δύο περνάνε από το ίδιο σημείο

Όμοια $X_2=-2P$ κ $X_3=-2P$ ■